1) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 7 & 1 & -2 & 8 \end{pmatrix} \underset{r_3 = r_3 - 7r_1}{\overset{r_2 = r_2 - 3r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 8 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 = r_3 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$r_2 \to \frac{1}{4} r_2$

$r_3 \to \frac{1}{3} r_3$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \to r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $r_1 = r_1 - \frac{3}{4} r_3$

$r_2 = r_2 + \frac{1}{4} r_3$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3 \to c_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_4 = c_4 + \frac{1}{4} c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cancel{-\frac{1}{4}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_4 \to c_4 + \frac{1}{4} c_2}$

$(+) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$ Στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών $\odot$

$A \sim (+) \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} = PAQ$

2) (i) $\exists A^{-1}$ κ' $\exists B^{-1} \Rightarrow \text{rank} A = \text{rank} B = n$

$\exists A^{-1} \Leftrightarrow$ ο ανηγμένος κλιμακωτός του A είναι ο ταυτοτικός $\Rightarrow \text{rank} I = n$. Άρα κ' ο A έχει rank n. Το ίδιο για το B.

γ) AB αντιστρέψιμος

$\exists A^{-1}, \exists B^{-1} \Rightarrow \exists B^{-1}A^{-1} \Rightarrow (AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I \Rightarrow B^{-1}A^{-1}$ είναι ο αντίστροφος του AB.

ή

$\det A \neq 0 \Leftrightarrow A$ αντιστρέψιμος.

$\exists A^{-1}\ \exists B^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0 \neq \det B$

$\det A \det B \neq 0 \Rightarrow \det(AB) \neq 0 \Rightarrow \exists (AB)^{-1}$

$\exists (AB)^{-1} \Rightarrow \exists A^{-1}, \exists B^{-1}$

3) $B = \Gamma A \Gamma^{-1}$ όμοιοι

$B^k = \Gamma A^k \Gamma^{-1} = (\Gamma A \Gamma^{-1})^k$

4) α) $\text{tr}AB = \text{tr}BA$

$AB = (c_{i,j}) \quad c_{i,j} = \sum_{t=1}^{n} a_{i,t} b_{t,j}$

$BA = (d_{i,j}) \quad d_{i,j} = \sum_{t=1}^{n} b_{i,t} a_{t,j}$

$\text{tr}(AB) = \sum_{t=1}^{n} c_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{n} a_{i,t} b_{t,i}$

$\text{tr}(BA) = \sum_{i=1}^{n} d_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{n} b_{i,t} a_{t,i}$

με εναλλαγή των μεταβλητών των αθροισμάτων.

Αν $B = (\Gamma A)\Gamma^{-1} \Rightarrow \text{tr}B = \text{tr}A \quad \text{tr}((\Gamma A)\Gamma^{-1}) = \text{tr}\,\Gamma^{-1}(\Gamma A) = \text{tr}((\Gamma^{-1}\Gamma)A) = \text{tr}(IA) = \text{tr}A$

5) rank $= 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r-2 & 2 \\ 0 & s-1 & r+2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & r-2 & 2 \\ 0 & s-1 & r+2 \\ 0 & 0 & \boxed{3} \end{pmatrix} \quad \text{rank} A \geq 2$$

Για $r=2$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & s-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-4} & 0 \\ 0 & s-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rank} A = 3$

$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & r-2 & 2 \\ 0 & s-1 & r+2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \xrightarrow{\text{Για } r\neq 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r-2 & 0 \\ 0 & s-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & r-2 & 2 \\ 0 & s-1 & r+2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$ $\text{rank} \neq 2 \Rightarrow$ $r-2=0 \Rightarrow r=2$
$s-1=0 \Rightarrow s=1$

πρέπει να είναι 0

6) $\det A = 0 \Leftrightarrow a = 1$ ή 4 ή 2

$B = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$ $a=0$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Άρα πρέπει $a \neq 0$

$\det B = \det \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1-a^2 & a-a^2 \\ 0 & a-a^2 & 1-a^2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & (1-a)(1+a) & a(1-a) \\ 0 & a(1-a) & (1-a)(1+a) \end{pmatrix}$

Για $\underline{a=1}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\det A = 0$ Για $a \neq 1$ $(1-a)^2 \det \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1+a & a \\ 0 & a & a+1 \end{pmatrix}$

$a(1-a)^2 \det \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1+a & a \\ 0 & 1 & \frac{a+1}{a} \end{pmatrix}$ Για $a=-1$ γίνεται $(-1)2^2 \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$

$a \neq -1$
$a \neq 0$
$a(1-a)^2 \det \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1+a & a \\ 0 & 1 & \frac{a+1}{a} \end{pmatrix} = a(1-a)^2 \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 0 & a - \frac{(1+a)^2}{a} \\ 0 & 1 & \frac{1+a}{a} \end{pmatrix}$

$-a(1-a)^2 \det \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1 & \frac{1+a}{a} \\ 0 & 0 & \frac{a-\frac{(1+a)^2}{a}}{a} \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow a - \frac{(1+a)^2}{a} = 0 \Leftrightarrow a^2 - (1+a)^2 = 0$
$a \neq 0$
$a^2 - 1 - 2a - a^2 = 0$
$a = -\frac{1}{2}$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & k \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & k \\ -1 & -2 & 0 & 4 \cdots & k \\ \vdots & & & & \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & & \\ 0 & 2 & 6 & & k \\ 0 & 0 & 3 & & 2k \\ & & & 8 & 2k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix} = 1\cdot 2\cdot 3\cdots k = k!$$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1+i & 1+2i \\ 1-i & 0 & 2-3i \\ 1-2i & 2+3i & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{\overset{\text{Με}}{=\!=}} 6 \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1+i & 1+2i \\ 1-i & 0 & 2-3i \\ 1-2i & 2+3i & 0 \end{pmatrix} \quad A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1-i & 1-2i \\ 1+i & 0 & 2+3i \\ 1+2i & 2-3i & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \bar{A}^t$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix}$$

rank 0, 1, 2
$\Downarrow$
$A=0$

1 μηδενικό στοιχείο

γραμμοπράξεις

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\exists \det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{rank} A = 2$$

$$\exists \det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \neq 0$$

$(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

$\text{rank}\begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & x & y \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow$ $\begin{matrix} x=t \\ y=t^2 \\ z=t^3 \end{matrix}$ $\begin{matrix} x \\ y=x^2 \\ z=x^3 \end{matrix}$

Αν $x=0$ $\begin{pmatrix} 0 & y & z \\ 1 & 0 & y \end{pmatrix}$

Αν $y\neq 0 \Rightarrow \cancel{\text{rank}=2}$

$y=0$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$z\neq 0$ $\cancel{\text{rank}=2}$

Αν $x=0=y=z$

$x\neq 0$ Αν $y-x^2\neq 0 \Rightarrow$ rank 2

Αν $z-yx\neq 0 \Rightarrow$ rank 2

Επειδή θέλουμε rank $=1$

$x\neq 0$ $y=x^2$ κ' $z=yx \Leftrightarrow z=x^3$

$x=0=y=z$

$\forall x\in\mathbb{R}$ έχουμε $y=x^2$

$z=x^3$

$W\leq V$ υπόχωρος του V δ.χ

π.χ. Έστω $\mathbb{R}[x]$ όλα τα πολ/μα με πραγματικούς συντελεστές ω.x

$W=\{f$ πολ/μο ώστε $f(s)=0\}\ \exists x-s$

Είναι $W\leq \mathbb{R}[x]$;;;

$f,g\in W \Rightarrow f+g\in W$;;; $\Leftrightarrow (f+g)(s)=f(s)+g(s)=0+0=0$, ισχύει

$r\in\mathbb{R}$ $(rf)(s)=rf(s)=r\cdot 0=0 \Rightarrow W\leq \mathbb{R}[x]$.

$W'=\{f$ έχει πραγματικές ρίζες$\}$

Είναι $W'\leq \mathbb{R}[x]$;;;

$W'\neq\emptyset$

$(x^2-x)+(x+1)=x^2+1$ Άρα $W'\nleq \mathbb{R}[x]$

π.χ. $W=\{\kappa(1,1,1)+\lambda(0,2,3)\mid \kappa,\lambda\in\mathbb{R}\}$

$W\leq\mathbb{R}^3$ κ' μάλιστα επίπεδο

$W_1=\{\kappa(1,1,1)\mid \kappa\in\mathbb{R}\}\leq\mathbb{R}^3$ ευθεία

$W_2 = \{\lambda(0,2,3) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \leq \mathbb{R}^3$ ευθεία

$W_1 \cup W_2 \nleq \mathbb{R}^3$

$W_1 + W_2 = W$

$$W = \{\kappa \overset{u_1}{(1,1,1)} + \lambda \overset{u_2}{(0,2,3)} \mid \kappa, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$\{(1,1,1), (0,2,3)\}$ "γεννά" του W
παράγει

ΕΡΩΤΗΜΑ: Ποιος είναι ο "ευκολότερος" τρόπος για να περιγράψω έναν δχ ή ένα δ. υπόχωρο;

Ορισμός: Έστω V δχ κ' S $S = \{u_1, \ldots, u_k\} \subseteq V$. Το $u \in V$ θα καλείται γραμμικός συνδυασμός του S αν υπάρχουν αριθμοί $r_1, r_2, \ldots, r_k$ ώστε $u = r_1u_1 + r_2u_2 + \ldots + r_ku_k$

Ορισμός: Έστω V δχ κ' $S \subseteq V$. Αν κάθε στοιχείο του V γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του S, θα λέμε ότι το S γεννά-παράγει τον V. Γράφουμε $V = \langle S \rangle$. Το ίδιο κ' για υποχώρους.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Για να περιγράψουμε εύκολα έναν δ.χ. αρκεί να βρούμε ένα S το οποίο τον γεννά.

Ορισμός: Έστω V δ.χ. κ' $S \subseteq V$ με $\langle S \rangle$ συμβολίζουμε όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς των στοιχείων του S.

Λήμμα: Έστω V δ.χ. κ' $S \subseteq V$. Το υποσύνολο $\langle S \rangle$ είναι υπόχωρος

Απόδειξη: $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\} \subseteq V$. $u \in \langle S \rangle \Leftrightarrow u = r_1u_1 + r_2u_2 + \ldots + r_ku_k$.

$u' \in \langle S \rangle \Leftrightarrow u' = r_1'u_1 + r_2'u_2 + \ldots + r_k'u_k$.

$u + u' = (r_1 + r_1')u_1 + (r_2 + r_2')u_2 + \ldots + (r_k + r_k')u_k \in \langle S \rangle$

Π.χ. $S = \{(1,1,1)\}$

$\langle S \rangle = \{r_1(1,1,1) \mid r_1 \in \mathbb{R}\}$

π.χ. Το σύνολο $S=\{(1,1),(2,1),(0,3)\}$ γεννά τον $\mathbb{R}^2$;

Για να τον γεννά θα πρέπει κάθε στοιχείο του (x,y) να γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του S.

Βρες r_1, r_2, r_3 ώστε

$(x,y) = r_1(1,1)+r_2(2,1)+r_3(0,3)$

$x = r_1+2r_2$ $\qquad$ $x-y = r_2-3r_3$

$y = r_1+r_2+3r_3$ $\qquad$ $2y-x = r_1+6r_3$

$(3,5) = r_1(1,1)+r_2(2,1)+r_3(0,3)$

$-2 = r_2-3r_3$ $\qquad$ Για βάλε $r_3=0$ $\qquad$ $r_3=1$

$7 = r_1+6r_3$ $\qquad$ $r_2=-2$ $\quad$ $r_1=7$ $\qquad$ $r_2=1$

$r_1=1$

π.χ. Το $S=\{x+1,\ x^2+x,\ x^3-x^2\}$ παράγει / γεννά τον $\mathbb{R}_3[x]$;;;

Τυχαίο $f(x)\in\mathbb{R}_3[x]$ $\quad$ $f(x)=ax^3+bx^2+\gamma x+\delta = r_1(x+1)+r_2(x^2+x)+r_3(x^3-x^2)$

$ax^3+bx^2+\gamma x+\delta = r_3x^3+(r_2-r_3)x^2+(r_1+r_2)x+r_1$

$\boxed{a=r_3}$ $\boxed{r_1=\delta}$

$b = r_2-r_3 \Rightarrow \boxed{r_2=b+a}$

$\gamma = r_1+r_2,\ \delta=r_1 \Rightarrow \gamma=\delta+b+a$

Παρατηρούμε ότι το συγκεκριμένο S δεν γεννά τον $\mathbb{R}_3[x]$

Ενώ το $S'=\{x^3,x^2,x,1\}$

πχ: Δείξτε ότι το $(0,0,0,0)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $(1,2,3,4),(2,0,1,-2)$ κ' $(3,2,4,2)$

Βρες r_1,r_2,r_3 ώστε

$(0,0,0,0)=r_1(1,2,3,4)+r_2(2,0,1,-2)+r_3(3,2,4,2)$

Για $r_1=r_2=r_3=0$ προφανώς ισχύει. Υπάρχουν r_1,r_2,r_3 όχι όλα μηδέν ώστε να ισχύει;

$0=r_1+2r_2+3r_3$

$0=2r_1+2r_3$

$0=3r_1+r_2+4r_3$

$0=4r_1-2r_2+3r_3$

$r_1 = -1, r_2 = -1, r_3 = 1$

<u>Λύση:</u> $r_1 = -2, r_2 = -2, r_3 = 2$

$(0,0,0,0) = -(1,2,3,4) - (2,0,1,-2) + (3,2,4,2)$

$(1,2,3,4) + (2,0,1,-2) = (3,2,4,2)$